

3. Cặp bài toán đối ngẫu

3.1 Khái niệm

3.1.1 Mô hình cặp bài toán đối ngẫu

Bài toán gốc: Một doanh nghiệp sản xuất ra hai loại chi tiết A, B. Số chi tiết A và B cần dùng là 138 và 101. Các chi tiết được chế tạo theo 3 cách:

- * Cách I: Tạo được 12 chi tiết A, 7 chi tiết B với chi phí là 24 đơn vị tiền.
- * Cách II: 8 A, 11 B, 26 đơn vị tiền.
- * Cách III: 15 A, 9 B, 23 đơn vị tiền.

Hãy tìm cách sản xuất các chi tiết sao cho tổng chi phí là thấp nhất?

Gọi x_1, x_2, x_3 là số lần áp dụng cách I, II, III.
Ta có bài toán QHTT:

$$\begin{cases} f(X) = 24x_1 + 26x_2 + 23x_3 \rightarrow \min \\ 12x_1 + 8x_2 + 15x_3 \geq 138 \\ 7x_1 + 11x_2 + 9x_3 \geq 101 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3}) \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu: Xét mô hình trên. Giả sử có người muốn bán hai loại chi tiết A và B cho doanh nghiệp. Vậy người này phải định giá các chi tiết này là bao nhiêu để doanh nghiệp đồng ý mua và tổng số tiền mà người này thu được là cao nhất.

Gọi y_1, y_2 là giá một chi tiết A, B do người bán ấn định. Theo ý nghĩa thực tế, ta có $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$.

Tổng số tiền thu được (yêu cầu cao nhất):

$$g(Y) = 138y_1 + 101y_2 \rightarrow \max$$

Doanh nghiệp sản xuất cách I thì được 12 chi tiết A, 7 chi tiết B, chi phí là 24 đv.tiền. Nếu mua chừng ấy chi tiết thì phải trả $12y_1 + 7y_2$ đv.tiền. Vậy, doanh nghiệp chỉ đồng ý mua khi số tiền phải trả không vượt quá chi phí sản xuất. Vậy:

$$12y_1 + 7y_2 \leq 24$$

Tương tự:

$$8y_1 + 11y_2 \leq 26$$

$$15y_1 + 9y_2 \leq 23$$

Mô hình toán của bài đối ngẫu là bài toán QHTT:

$$\begin{aligned} g(Y) &= 138y_1 + 101y_2 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} 12y_1 + 7y_2 \leq 24 \\ 8y_1 + 11y_2 \leq 26 \\ 15y_1 + 9y_2 \leq 23 \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,2}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy, mỗi bài toán QHTT đều tương ứng với một bài toán QHTT khác có liên quan mật thiết với nó. Ta gọi đây là **cặp bài toán đối ngẫu**. Bài cho trước được gọi là bài gốc.

Từ dạng thức của cặp bài toán đối ngẫu trên, ta rút ra nhận xét sau:

- * Một bài yêu cầu min, một bài yêu cầu max.
- * Số biến của bài này bằng số ràng buộc của bài kia.
- * Hệ số C của bài này là hệ số B của bài kia.
- * Nếu xem các hệ số vế trái của hệ ràng buộc là một ma trận thì ma trận hệ số của bài này là chuyển vị ma trận hệ số của bài kia.

3.1.2 Lập bài toán đối ngẫu

Bằng cách tổng quát hóa các cặp bài toán đối ngẫu có mô hình thực tế, người ta đề ra quy tắc như sau để thành lập bài toán đối ngẫu từ bài toán gốc có dạng tổng quát:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$g(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i \in I_1 \quad (1) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i \in I_2 \quad (2) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i \in I_3 \quad (3) \\ x_j \geq 0 \quad j \in J_1 \quad (4) \\ x_j \in \mathbb{R} \quad j \in J_2 \quad (5) \\ x_j \leq 0 \quad j \in J_3 \quad (6) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad j \in J_1 \quad (1') \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad j \in J_2 \quad (2') \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad j \in J_3 \quad (3') \\ y_i \geq 0 \quad i \in I_1 \quad (4') \\ y_i \in \mathbb{R} \quad i \in I_2 \quad (5') \\ y_i \leq 0 \quad i \in I_3 \quad (6') \end{array} \right.$$

Các cặp ràng buộc và điều kiện về dấu có liên quan với nhau giữa hai bài toán là: (1)-(4'), (2)-(5'), (3)-(6'), (4)-(1'), (5)-(2'), (6)-(3').

Các cặp có liên quan và là bất đẳng thức được gọi là các **cặp điều kiện đối ngẫu** hay cặp ràng buộc đối ngẫu: (4)-(1'), (6)-(3'), (1)-(4'), (3)-(6').

Chú thích Nếu bài toán gốc là bài toán max thì ta đọc công thức trên từ phải sang trái.

VD

$$\begin{aligned} f(X) = 2x_1 & \quad \quad \quad - 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 7x_4 \leq 41 \\ 8x_1 - 11x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 12 \\ 15x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 6x_4 \geq 8 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Bài toán đối ngẫu:

$$g(Y) = 41y_1 + 12y_2 + 8y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 8y_2 + 15y_3 \geq 2 \\ 7y_1 - 11y_2 - 9y_3 \geq 0 \\ -3y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq -5 \\ 7y_1 - 4y_2 + 6y_3 \geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

Có 6 cặp điều kiện đối ngẫu là:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{và} \quad 3y_1 + 8y_2 + 15y_3 \geq 2$$

$$x_2 \geq 0 \quad \text{và} \quad 7y_1 - 11y_2 - 9y_3 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0 \quad \text{và} \quad -3y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq -5$$

$$x_4 \geq 0 \quad \text{và} \quad 7y_1 - 4y_2 + 6y_3 \geq 3$$

$$3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 7x_4 \leq 41 \quad \text{và} \quad y_1 \geq 0$$

$$15x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 6x_4 \geq 8 \quad \text{và} \quad y_3 \leq 0$$

3.2 Các định lý đối ngẫu

Cặp bài toán đối ngẫu trong đó có một bài chính tắc được gọi là cặp đối ngẫu không đối xứng.

Các kết quả sau đây đã được chứng minh cho cặp đối ngẫu không đối xứng. Tuy nhiên, mọi bài toán tổng quát đều đưa được về bài toán chính tắc, do đó các kết quả này cũng dùng được cho cặp bài toán đối ngẫu tổng quát.

* Xét X là PA của bài toán min, Y là PA của bài toán max. Ta luôn luôn có: $g(Y) \leq f(X)$

* Nếu PA X^* của bài toán min và PA Y^* của bài toán max thỏa $f(X^*) = g(Y^*)$ thì X^* và Y^* là PATU của bài toán min và bài toán max.

* Nếu một bài toán có PATU thì bài đối ngẫu cũng có PATU và giá trị tối ưu của chúng bằng nhau.

Định lý (Độ lệch bù yếu)

Xét X^* là PA của bài toán min, Y^* là phương án của bài toán max.

X^* và Y^* là PATU của bài toán min và bài toán max nếu và chỉ nếu trong mỗi cặp điều kiện đối ngẫu đều có một đẳng thức.

Chú thích Trong cặp điều kiện đối ngẫu nếu biết một điều kiện là bất đẳng thức ngặt thì điều kiện còn lại là đẳng thức.

VD Xét bài toán QHTT:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= \mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3 \rightarrow \min \\ &\left\{ \begin{array}{l} 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \geq 2 \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3 + 3\mathbf{x}_4 \leq 5 \\ -\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = 1 \\ \mathbf{x}_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Giải bài toán này ta có PATU $\mathbf{X}^* = (1/3, 0, 0, 4/3)$.

Ta muốn tìm PATU của bài toán đối ngẫu.

Bài toán đối ngẫu:

$$g(Y) = 2y_1 + 5y_2 + y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 \leq 1 \\ y_1 \leq 3 \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 0 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0 \end{cases}$$

Các cặp điều kiện đối ngẫu:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{và} \quad 2y_1 + y_2 - y_3 \leq 1$$

$$x_2 \geq 0 \quad \text{và} \quad y_1 \leq 3$$

$$x_3 \geq 0 \quad \text{và} \quad y_1 - y_2 + y_3 \leq 2$$

$$x_4 \geq 0 \quad \text{và} \quad y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2 \quad \text{và} \quad y_1 \geq 0$$

$$x_1 - x_3 + 3x_4 \leq 5 \quad \text{và} \quad y_2 \leq 0$$

Do bài toán gốc có PATU X^* nên bài toán đối ngẫu cũng có PATU ký hiệu là Y^* . Theo định lý Độ lệch bù yếu:

$$x_1 = 1/4 \neq 0 \Rightarrow 2y_1 + y_2 - y_3 = 1 \quad (1)$$

$$x_4 = 4/3 \neq 0 \Rightarrow y_1 + 3y_2 + y_3 = 0 \quad (2)$$

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 13/5 \neq 5 \Rightarrow y_2 = 0 \quad (3)$$

Giải hệ (1),(2),(3) ta có $Y^* = (1/3, 0, -1/3)$.

Ghi chú Khi thiếu phương trình để tìm Y^* , ta sử dụng thêm phương trình $g(Y) = f(X^*)$.

Khi có vô số nghiệm Y^* thì thay nghiệm tổng quát vào các ràng buộc và các điều kiện về dấu của bài toán đối ngẫu để tìm ra điều kiện của các ẩn tự do.